Άσκηση 11 /σελ. 374 : Να δούμε τη μετρική εκεί
$\mathbb{R}_\infty$, $d(\infty, \infty) = 0$

Έτσι σε προηγούμενη άσκηση : $\delta(A') \leq \delta(A)$

$A = \mathbb{N}$, $\delta(\mathbb{N}) = +\infty$

$A' = \{\infty\}$, $\delta(A') = 0$

και η πράξη δεν είναι καλά ορισμένη

⇝ μπορούμε όμως με την μετρική αυτή να μην έχουμε θέμα

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.3/σελ. 101 Ας είναι S ένας υπόχωρος ενός μ.χ. (E, ρ) και A ένα υποσύνολο του S. Συμβολίζουμε με $\bar{A}_S$ και $\bar{A}_E$ (A°_S και A°_E αντίστοιχα) την θήκη (τον πυρήνα αντίστοιχα) του A ως προς S και E αντίστοιχα. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\underbrace{\bar{A}_S = S \cap \bar{A}_E}_{(1)} \quad \text{και} \quad \underbrace{A^\circ_S \supseteq S \cap A^\circ_E}_{(2)}$$

Απόδειξη

Για το (1) α.ν.δ.ο. : $S \cap \bar{A}_E$ είναι το ελάχιστο κλειστό εν E που περιέχει το A

αφού αυτό ισχύει για το $\bar{A}_S$, αν τ' αποδείξουμε και για το $S \cap \bar{A}_E$ θα έχουμε ισότητα.

i) από υπόθεση $A \subseteq S$, $A \subseteq \bar{A}_E$ $\Big\}$ $A \subseteq S \cap \bar{A}_E$

ii) $\bar{A}_E$ κλειστό εν E άρα από θεώρ. $S \cap \bar{A}_E$ είναι κλειστό εν S

iii) έστω K κλειστό εν S, $K \subseteq S$, $\underbrace{A \subseteq K}_{(*)}$

K κλειστό εν $S \Rightarrow \exists M$ κλειστό εν E τω. $K = S \cap M$

$$\left.\begin{array}{l} K = S \cap M \\ \text{όμως } K \overset{(*)}{\supseteq} A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S \cap M \supseteq A \\ \text{όμως } M \supseteq S \cap M \end{array}\right\} \Rightarrow M \supseteq A$$

παίρνω θήκη

$$\left.\begin{array}{l} \xRightarrow{\text{5}} \overline{M}_E \supseteq \overline{A}_E \\ \text{όμως } M \text{ κλειστό εν } E, \\ \text{δηλ. } \overline{M}_E = M \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \supseteq \overline{A}_E \quad , (**)$$

άρα, $K = S \cap M \overset{(**)}{\supseteq} S \cap \overline{A}_E \Rightarrow K \supseteq S \cap \overline{A}_E$

Άρα τελικά $\overline{A}_S = S \cap \overline{A}_E$

Για το (2):

A°_S είναι το μέγιστο ανοιχτό εν S σύνολο που περιέχεται στο A.

Θ.δ.ο. $S \cap A^\circ_E$ είναι ανοιχτό εν S και περιέχεται στο A.

Αφού A°_E είναι ανοιχτό εν E $\xRightarrow[\text{από Θεωρ. του κεφαλαίου}]{\text{5}}$ $S \cap A^\circ_E$ είναι ανοιχτό εν S

$S \cap A^\circ_E \subseteq S \cap A \xlongequal{A \subseteq S} A$

Άρα $A^\circ_S \supseteq S \cap A^\circ_E$.

Εφαρμογή 3.2.2 / σελ. 103: Η σχέση $A^\circ_S \supseteq S \cap A^\circ_E$ μπορεί να ισχύει και ως γνήσια διάταξη.

Απόδειξη

Ο χώρος που εργαζόμαστε είναι $(E, \rho) = (\mathbb{R}, |\,|)$.

$S = [0,2]$
$A = [0,1)$

$A^\circ_E = (0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} A^\circ_S = [0,1)^\circ_S \\ \left.\begin{array}{l} [0,1) = \underset{S}{[0,2]} \underset{\cap}{\cap} \underset{B}{(-1,1)} \\ B = (-1,1) \text{ ανοιχτό εν } E = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow [0,1) \text{ ανοιχτό εν } S \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A^\circ_S = [0,1)^\circ_S = [0,1)$ διότι $[0,1)$ ανοιχτό εν S

$S \cap A^\circ_E = [0,2] \cap (0,1) = (0,1)$

Άρα παρατηρούμε ότι: $A^\circ_S = [0,1) \supset (0,1) = S \cap A^\circ_E$

Άσκηση 1 / σελ. 421: Στο μετρικό υπόχωρο $S = (0,\infty)$ του Ευκλείδιου μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\,|)$ να βρεθούν τα σύνολα
$\overline{(0,1)}_S$, $(0,1)^\circ_S$, $\overline{[2,3)}_S$ και $[2,3)^\circ_S$

Λύση

Έχουμε αποδείξει ότι: $\overline{A}_S = S \cap \overline{A}_E$
$A^\circ_S \supseteq S \cap A^\circ_E$

Έχουμε:
$\overline{(0,1)}_S = S \cap \overline{(0,1)}_{\mathbb{R}} = (0,\infty) \cap [0,1] = (0,1]$

$(0,1)^\circ_S = ;$

$$\left.\begin{array}{l} (0,1) = \underset{S}{(0,\infty)} \underset{\cap}{\cap} \underset{B}{(0,1)} \\ B = (0,1) \text{ ανοιχτό εν } \mathbb{R} \end{array}\right| \Rightarrow (0,1) \text{ ανοιχτό εν } S \Rightarrow (0,1)^\circ_S = (0,1)$$

$\overline{[2,3)}_S = S \cap \overline{[2,3)}_{\mathbb{R}} = [0,\infty) \cap [2,3] = [2,3]$

$[2,3)^\circ_S = \;;$

$[2,3) = [0,\infty) \cap$ και ανοιχτό να σ'αυτή τη περίπτωση δε μπορούμε να το γράψουμε έτσι

$(2,3)$ πάμε να δούμε τι κάνει το ανοιχτό
$(2,3)^\circ_S$

$$\left.\begin{array}{l} (2,3) = \underset{S}{[0,\infty)} \underset{\cap}{\cap} \underset{K}{(2,3)} \\ K = (2,3) \text{ ανοιχτό εν } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow (2,3) \text{ ανοιχτό εν } S$$

$$\Rightarrow (2,3)^\circ_S = (2,3)$$

Έχουμε τώρα δύο επιλογές: $[2,3)^\circ_S <$ $(2,3)$
$[2,3)$

Πώς καταλήξαμε σ'αυτό το συμπέρασμα;
$\Rightarrow \quad A^\circ_S \supseteq S \cap A^\circ$

$[2,3)^\circ_S \supseteq [0,\infty) \cap [2,3)^\circ_{\mathbb{R}} = [0,\infty) \cap (2,3) = (2,3)$

$[2,3) \supseteq [2,3)^\circ_S \supseteq (2,3)$

B' ΤΡΟΠΟΣ

Έστω $2 \in [2,3)^\circ_S \Rightarrow (\exists r_1 > 0)\ B(2,r_1) \cap S \subseteq [2,3)$, (*)

θα καταλήξουμε ~~σε άτοπο~~

από εδώ μπορούμε να καταλήξουμε σε άτοπο και μέσω σχήματος (H/W)
Τώρα θα δούμε όμως έναν άλλο τρόπο.

$2 \in S = [0,\infty)$ ανοιχτό $\Rightarrow (\exists r_2 > 0)\ B(2,r_2) \subseteq S$

Επιλέγουμε $r = \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow B(2,r) \subseteq B(2,r_1) \cap S \overset{(*)}{\subseteq} (2,3)$
$\Rightarrow 2 \in [2,3)^\circ = (2,3)$ ↯ αφού $2 \notin (2,3)$

Άρα τελικά, $[2,3)^\circ_S = (2,3)$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΣΤΟΛΗΣ

$f: \underbrace{(E,\rho)}_{\text{πλήρης}} \to (E,\rho)$, $\exists\ \theta \in [0,1)$: $\rho(f(x), f(y)) \leq \theta\ \rho(x,y)$ $\forall$

Τότε $\exists$ μοναδικό $a \in E$: $f(a) = a$ (δηλ. αφήνει ένα σημείο αναλλοίωτο)

Απόδειξη (έξυπνη ❢)

Επιλέγουμε ένα $x_0 \in E$.

$$x_1 = f(x_0)$$
$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0) = (f \circ f)(x_0)$$
$$\vdots$$
$$x_n = f^{(n)}(x_0) = (\underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{n-\text{φορές}})(x_0)$$

έχουμε φτιάξει λοιπόν αυτή την ακολουθία, παίρνοντας διαδοχικές συνθέσεις.

$(x_n)_n \subset E$

$x_0 \in E$

άρα αναδρομικά γράφεται : $x_{n+1} = f(x_n)$ με $x_1 = f(x_0)$

Θ.δ.ο. $(x_n)_n$ βασική.

$\rho(x_m, x_n) \leq$

$m \leq n$

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1}))$$
$$\leq \theta\ \rho(x_n, x_{n-1}) \quad \text{(από υπόθεση)}$$
$$= \theta\ \rho(f(x_{n+1}), f(x_{n-2}))$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι : $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n (\rho(x_1, x_0))$, $x_1 = f(x_0)$

Έχουμε λοιπόν: $\overbrace{}^{\text{παρεμβάλουμε όλους τους διαδοχικούς όρους}}$

$$\leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n)$$
$$\leq \theta^m \rho(x_1, x_0) + \theta^{m+1} \rho(x_1, x_0) + \ldots + \theta^{n-1} \rho(x_1, x_0)$$

αυτό το κομμάτι δεν μας ενδιαφέρει, είναι τόσο φραγμένο

$= [\theta^m + \dots + \theta^{n-1}]\, \rho(x_1, x_0)$

$= \theta^m (1 + \theta + \dots + \theta^{n-1-m})\, \rho(x_1, x_0)$

$\leq \theta^m \left(\sum_{k=0} \theta^k \right) \rho(x_1, x_0)$

$\leq \dfrac{\theta^m}{1-\theta} \rho(x_1, x_0)$ με $m<n$, $0 \leq \theta < 1$, $\theta^m \to 0$ για $m \to \infty$

Αν $\varepsilon > 0$, $\exists m_0$ $\theta^m < \varepsilon$, $\forall m \geq m_0$

$\forall m, n \geq m_0$:

$0 \leq \rho(x_m, x_n) \leq \dfrac{\varepsilon\, \rho(x_1, x_0)}{1-\theta}$ μπορεί να είναι όσο μικρό θέλει

(x_n) βασική $\subseteq (E, \rho)$ πλήρης

$\exists\, a,\ x_n \xrightarrow{+} a$

$x_{n+1} = f(x_n)$

τείνει $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ τείνει

$a = f(a)$

άρα $\exists\, f(a) = a$.

Υπάρχει κάποιο και δεύτερο σημείο; $\exists;\ \beta : f(\beta) = \beta$

Έχουμε: $\rho(f(x), f(y)) \leq \theta \cdot \rho(x, y)$ $\forall x, y \in E$

$0 \leq \rho(a, \beta) = \rho(f(a), f(\beta)) \leq \theta \rho(a, \beta)$

$\Rightarrow \rho(a, \beta) = 0$

$\Rightarrow \beta = a$

Άρα κάθε συστολή έχει μοναδικό σταθερό σημείο

Παράδειγμα: $f : (E, \rho) \to (E, \rho)$

$\theta = 1$: $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x+1$

Οπότε η υπόθεση $\theta < 1$ είναι απαραίτητη.

Απαραίτητη είναι και η πληρότητα ώστε από τη βασικότητα, να περάσουμε στο όριο.

$(E, \rho) = ((0,1), |\cdot|)$

$f(x) = \frac{x}{2}$

$f: (0,1) \to (0,1)$ συστολή $\frac{1}{2}$

όμως ο χώρος δεν είναι πλήρης
$x_0 \in (0,1)$
$f(x_n) = x_{n+1}$, $x_1 = f(x_0)$

$x_1 = f(x_0) = \frac{x}{2}$

$x_2 = f(x_1) = \frac{x_0}{4}$

άρα

$x_n = \frac{x_0}{2^n} \to 0 \notin$ στον μ.χ.

πετύχαμε δηλ. το όριο όμως μας λείπει η πληρότητα.

ΠΡΟΤΑΣΗ $f: (E, \rho) \to (E, \rho)$, $k \in \mathbb{N}$, $g = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$
g συστολή $\Longrightarrow$ f έχει μοναδικό σταθερό σημείο

Δηλ. μπορεί f όχι συστολή ενώ $f \circ f$ συστολή

Παράδειγμα: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$= 1 \quad \forall x$$

Η f δεν είναι συστολή γιατί δεν είναι πουθενά συνεχής.

Απόδειξη: $g = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\kappa\text{-φορές}} : (E, \rho) \to (E, \rho)$

Υπόθεση: g συστολή $\Rightarrow \exists a, \; g(a) = a$

$\Rightarrow f^{(\kappa)}(a) = a, \; a \in E$

$f^{(\kappa)}(a) = a$

$f^{(\kappa+1)}(a) = f(a)$

$\quad ||$

$f^{(\kappa)}(f(a)) = f(a) \Rightarrow f(a), a$ είναι σταθερά σημεία της $f^{(\kappa)}$

$\Rightarrow f(a) = a$

$\Rightarrow a$ σταθερό σημείο της f

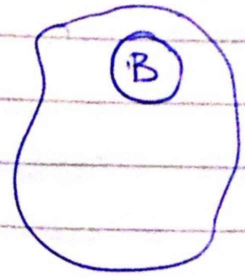
Μοναδικότητα: Α.ν.δ.ο. β σταθ. σημείο της f

$\Rightarrow \beta$ σταθ. της $f^{(\kappa)}$

$f(\beta) = \beta \Rightarrow f(f(\beta)) = f(\beta) = \beta$

Επαγωγικά $f^{(\kappa)}(\beta) = \beta$

ΟΡΙΣΜΟΣ (E,ρ) ολικά φραγμένος αν-ν $\forall \varepsilon>0\ \exists D_\varepsilon$ πεπερασμένο $\subseteq E$, ε-πυκνό στον (E,ρ) $\left(\iff E = \bigcup_{x\in D_\varepsilon} B(x,\varepsilon)\right)$
θα τ' αποδείξουμε



($\Longrightarrow$) Έστω $\varepsilon>0$ και D_ε-πυκνό $\subseteq (E,\rho)$.
αν $y\in E \Rightarrow \exists x\in D_\varepsilon : \rho(x,y)<\varepsilon$
$\Rightarrow y\in B(x,\varepsilon)$
$\Rightarrow y\in \bigcup_{x\in D_\varepsilon} B(x,\varepsilon)$

Θα δούμε τώρα ότι το ολικά φραγμένο είναι πιο ισχυρή έννοια από το φραγμένο.

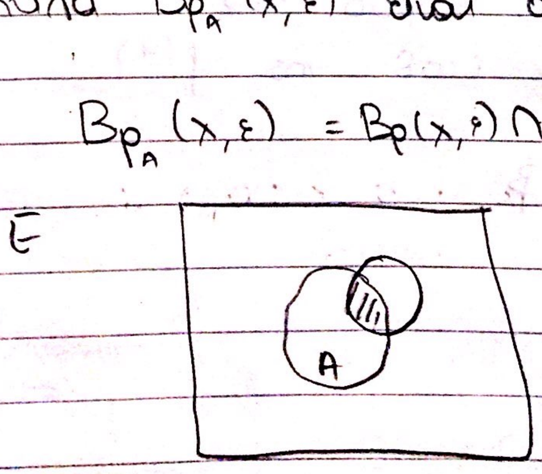
ΟΡΙΣΜΟΣ (E,ρ) $A\subseteq E$ ολικά φραγμένο $\iff$ (A,ρ_A) ολικά φραγμένο

πώς θα το λέγαμε με μπάλες $\Updownarrow$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists D_\varepsilon$ πεπερ. $\subseteq$
$A = \bigcup_{x\in D_\varepsilon} B_{\rho_A}(x,\varepsilon)$
$(*)$
$= \bigcup_{x\in D_\varepsilon} \left(B_\rho(x,\varepsilon)\cap A\right)$
(τα κέντρα πρέπει να είναι μέσα στο A)

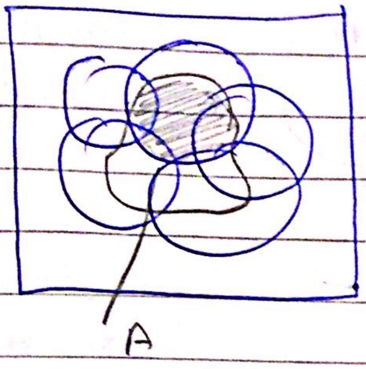
$\rho : E\times E \to \mathbb{R}$
$\rho_A : A\times A \to \mathbb{R}$, (A,ρ_A)

Η μπάλα $B_{\rho_A}(x,\varepsilon)$ είναι ο περιορισμός της $B_\rho(x,\varepsilon)$ στο ρ_A
δηλ.
$$B_{\rho_A}(x,\varepsilon) = B_\rho(x,\varepsilon)\cap A$$



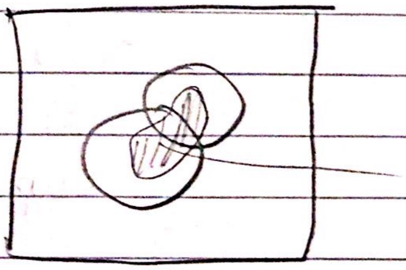
Το (*) αλλιώς γράφεται:

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists D_\varepsilon \subseteq A$ πεπερ. $A \subseteq \bigcup_{x\in D_\varepsilon} B_\rho(x,\varepsilon)$



$$\Downarrow$$

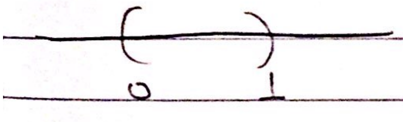
$$A = \bigcup_{x\in D_\varepsilon} \left(B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \right)$$

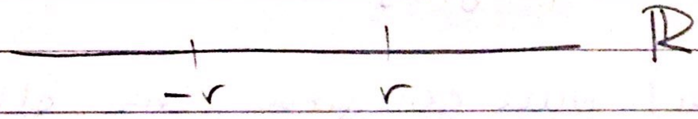


έχουμε δύο μπάλες

το A είναι $\subseteq$ της ένωσής τους (?)

ΠΡΟΤΑΣΗ (E,ρ) μ.χ., $A \subseteq E$ ολικά φραγμένο
$\Rightarrow A$ φραγμένο.





φραγμένο στο $\mathbb{R}$

είναι και ολικά φραγμένο γιατί για ένα μικρό $\varepsilon>0$, μπορώ με πεπερασμένα διαστήματα (μπάλες ακτίνας ε, διαμέτρου 2ε) να καλύψω όλο το $(-r, r)$.

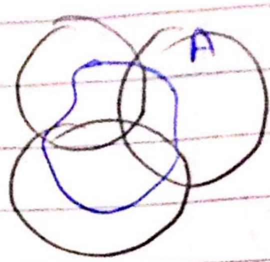
$\Rightarrow (-r,r)$ ολικά φραγμένο $\subset \mathbb{R}$

(θα δούμε αργότερα ότι στο $\mathbb{R}$ οι δύο έννοιες ταυτίζονται)

Απόδειξη

Για $\varepsilon = 1$, $\exists D_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$ πεπερασμένο
$\Downarrow$
θα έχει πεπερασμένη διάμετρο

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_\rho(a_j, 1) \quad , (1)$$



βρίσκουμε πεπερασμένο το πλήθος μπάλες που καλύπτουν το A

Από την (1), θδο. A φραγμένο.
Δηλ. θδο
$$\underbrace{\sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\}}_{=\delta(A)} < \infty$$

$(-1, 1)$
$\delta(A) = 2$ όμως
$\sup \neq 2$

Έστω $x, y \in A$
$$\Rightarrow \exists\, i, j \in \{1, \dots, k\} : \overset{(*)}{\begin{cases} x \in B_\rho(a_i, 1) \\ y \in B_\rho(a_j, 1) \end{cases}}$$

Αναζητούμε έναν αριθμό M, τ.ω. $\rho(x,y) \le M$ (και το M να είναι ανεξάρτητο από τα x, y)

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} \rho(x, a_i) < 1 \\ \rho(y, a_j) < 1 \end{cases}$$

$D_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ είναι φραγμένο, δηλ. $\delta(D_1) < \infty$

άρα θα ισχύει $\rho(a_i, a_j) \le \delta(D_1)$

Άρα, $\rho(x,y) \le \rho(x, a_i) + \rho(a_i, a_j) + \rho(a_j, y)$
$\quad < 1 + \delta(D_1) + 1$

$$\Rightarrow M = 2 + \delta(D_1)$$

έτσι αποδείξαμε ότι η διάμετρος πεπερασμένη, συνεπώς φραγμένο.

Παρατήρηση: $\mathbb{R}$ όχι φραγμένο $\Rightarrow$ όχι ολικά φραγμένο

$$\underset{\substack{\| \\ +\infty}}{\delta(\mathbb{R})} \geq \rho(-n,n) = 2n \to \infty$$

$$\underset{\substack{\| \\ \rho_\delta}}{(\mathbb{R}, \rho_1)}$$ φραγμένο όχι όμως ολικά φραγμένο

$$\rho_\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

$\delta(\mathbb{R}) = 1$

$(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ ολικά φραγμένο ?

Έστω ότι $(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ ολικά φραγμένο.
Αν $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists D_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ πεπερ.

$$\mathbb{R} = \underbrace{\bigcup_{x \in D_\varepsilon} B_\delta\left(x, \tfrac{1}{2}\right)}_{= \bigcup_{x \in D_{1/2}} \{x\} = D_{\frac{1}{2}}}$$